ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ
ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = e^x - \frac{x^2+4}{x-1}, \text{ με } x \neq 1 \text{ και } g(x) = 2e^x + \frac{x^2+1}{x-2}, \text{ με } x \neq 2.$$

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων fκαι g, έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο στο διάστημα (1,2).

Λύση:

Για να υπολογίσουμε το κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^x - \frac{x^2+4}{x-1} = 2e^x + \frac{x^2+1}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x + \frac{x^2+1}{x-2} + \frac{x^2+4}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)e^x + (x-1)(\cancel{x-2})\frac{x^2+1}{\cancel{x-2}} + (\cancel{x-1})(x-2)\frac{x^2+4}{\cancel{x-1}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)e^x + (x-2)(x^2+1) + (x-1)(x^2+4) = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = (x-1)(x-2)e^x + (x-2)(x^2+1) + (x-1)(x^2+4),\ x \in [1,2].$$

Ελέγχουμε εάν πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano (Θ.Β.) στην h στο διάστημα [1,2].

- Η h είναι συνεχής στο [0,1], ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $h(1) = -2 < 0$ &
  $h(2) = +8 > 0$, είναι λοιπόν

$$h(1) \cdot h(2) < 0.$$

Σύμφωνα με το Θ.Β. η εξίσωση

$$h(x) = 0,$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (1,2).

Συνεπώς οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g, έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο στο διάστημα (1,2).

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες στο $(-1,+\infty)$ συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν

- $f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (-1,+\infty)$ με $f(3) = g(3) = \frac{1}{2}$.
- $2f'(x) + f(x)\cdot g^2(x) = 0$ και $2g'(x) + g(x)\cdot f^2(x) = 0$, για κάθε $x \in (-1,+\infty)$.

(i) Να αποδείξετε ότι $f = g$.

(ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x > -1$.

Λύση:

(i) Από τα δεδομένα έχουμε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $(-1,+\infty)$, οπότε και συνεχείς στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

Επειδή ισχύει $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (-1,+\infty)$, τότε οι συναρτήσεις f, g διατηρούν σταθερό πρόσημο στο $(-1,+\infty)$ και δεδομένου ότι

$f(3) = g(3) = \frac{1}{2} > 0$, είναι $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$, για κάθε $x \in (-1,+\infty)$.

Για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν για κάθε $x \in (-1,+\infty)$

$$2f'(x) + f(x)\cdot g^2(x) = 0 \overset{\cdot f(x)>0}{\Leftrightarrow} 2f'(x)\cdot f(x) + f^2(x)\cdot g^2(x) = 0, \ \mathbf{(1)}.$$

και

$$2g'(x) + g(x)\cdot f^2(x) = 0 \overset{\cdot g(x)>0}{\Leftrightarrow} 2g'(x)\cdot g(x) + g^2(x)\cdot f^2(x) = 0, \ \mathbf{(2)}.$$

Με αφαίρεση των **(1)** και **(2)** παίρνουμε την ισότητα

$$2f'(x)\cdot f(x) - 2g'(x)\cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x)\cdot f(x) = 2g'(x)\cdot g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[f^2(x)\right]' = \left[g^2(x)\right]',$$

τότε υπάρχει σταθερά $c \in \Re$, ώστε, για κάθε $x \in (-1,+\infty)$

$$f^2(x) = g^2(x) + c.$$

Για $x = 3$, είναι $f^2(3) = g^2(3) + c$, αλλά $f(3) = g(3)$, οπότε $c = 0$, είναι λοιπόν, για κάθε $x \in (-1,+\infty)$

$$f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow |f(x)| = |g(x)| \underset{g(x)>0}{\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}} f(x) = g(x).$$

Επειδή δε οι συναρτήσεις f, g ορίζονται αμφότερες στο $(-1,+\infty)$, τότε $f = g$.

(ii) Εφόσον για κάθε $x \in (-1,+\infty)$, είναι $f(x) = g(x)$, τότε είναι

$$2f'(x) + f^3(x) = 0 \overset{\div \frac{1}{f^3(x)}>0}{\Leftrightarrow} \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2f'(x)}{f^3(x)} = -1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f^2(x)}\right)' = (-x)' \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f^2(x)}\right)' = (x)'$$

τότε υπάρχει σταθερά $c_1 \in \Re$, ώστε, για κάθε $x \in (-1, +\infty)$

$$\frac{1}{f^2(x)} = x + c_1.$$

Για x = 3, είναι $\frac{1}{f^2(x)} = x + c_1$, αλλά $f(3) = \frac{1}{2}$, οπότε $c_1 = 1$, είναι λοιπόν, για κάθε $x \in (-1, +\infty)$

$$\frac{1}{f^2(x)} = x + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$