ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑTA ΓΙΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ

ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

f (x) =ex – , με x ≠1 και g (x) = 2ex + , με x ≠2.

Nα αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων fκαι g, έχουν ένα

τουλάχιστον κοινό σημείο στο διάστημα (1,2).

***Λύση:***

Για να υπολογίσουμε το κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

f και g, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

f (x) = g (x) ⇔ex –  = 2ex + ⇔

⇔ ex +  +  = 0 ⇔

⇔ (x – 1)(x – 2)ex +  +  = 0 ⇔

⇔ (x – 1)(x – 2)ex + (x – 2)(x2 + 1) + (x – 1)(x2 + 4) = 0.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

h (x) = (x – 1)(x – 2)ex + (x – 2)(x2 + 1) + (x – 1)(x2 + 4), x∈[1,2].

Eλέγχουμε εάν πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Βοlzαno (Θ.Β.)

στην h στο διάστημα [1,2].

* Η h είναι συνεχής στο [0,1], ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
* h (1) = – 2 < 0 &

h (2) = + 8 > 0, είναι λοιπόν

h (1)⋅h (2) < 0.

Σύμφωνα με το Θ.Β. η εξίσωση

h (x) = 0,

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (1,2).

Συνεπώς οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g, έχουν ένα τουλάχιστον

κοινό σημείο στο διάστημα (1,2).

ΘΕΜΑ B

Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες στο (– 1,+ ∞) συναρτήσεις f, g για τις οποίες

ισχύουν

* f (x) ≠ 0 και g (x) ≠ 0, για κάθε x∈(– 1,+ ∞) με f (3) = g (3) = .
* 2f ΄(x) + f (x)⋅g2(x) = 0 και 2g ΄(x) + g (x)⋅f 2(x) = 0, για κάθε x∈(– 1,+ ∞).

**(i)** Nα αποδείξετε ότι f = g.

**(ii)** Nα αποδείξετε ότι f (x) = , x > – 1.

***Λύση:***

**(i)** Από τα δεδομένα έχουμε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο

(– 1,+ ∞), οπότε και συνεχείς στο διάστημα (– 1,+ ∞).

Επειδή ισχύει f (x) ≠ 0, g (x) ≠ 0, για κάθε x∈(– 1,+ ∞), τότε οι συναρτήσεις f, g διατηρούν σταθερό πρόσημο στο (– 1,+ ∞) και δεδομένου ότι

f (3) = g (3) =  > 0, είναι f (x) > 0 και g (x) > 0, για κάθε x∈(– 1,+ ∞).

Για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν για κάθε x∈(– 1,+ ∞)

2f ΄(x) + f (x)⋅g2(x) = 0 2f ΄(x)⋅f (x) + f 2(x)⋅g2(x) = 0, **(1)**.

και

2g ΄(x) + g (x)⋅f 2(x) = 0  2g ΄(x)⋅g (x) + g 2(x)⋅f 2(x) = 0, **(2)**.

Mε αφαίρεση των **(1)** και **(2)** παίρνουμε την ισότητα

2f ΄(x)⋅f (x) – 2g ΄(x)⋅g (x) = 0 ⇔ 2f ΄(x)⋅f (x) = 2g ΄(x)⋅g (x) ⇔

⇔  = ,

τότε υπάρχει σταθερά c∈ℜ, ώστε, για κάθε x∈(– 1,+ ∞)

f 2 (x) = g 2(x) + c.

Για x = 3, είναι f 2 (3) = g 2(3) + c, αλλά f (3) = g (3), οπότε c = 0, είναι λοιπόν, για κάθε x∈(– 1,+ ∞)

f 2 (x) = g 2(x) ⇔ |f (x)| = |g (x)|  f (x) = g (x).

Eπειδή δε οι συναρτήσεις f, g ορίζονται αμφότερες στο (– 1,+ ∞), τότε f = g.

**(ii)** Εφόσον για κάθε x∈(– 1,+ ∞), είναι f (x) = g (x), τότε είναι

2f ΄(x) + f 3(x) = 0   + 1 = 0 ⇔

⇔  = – 1 ⇔  = (– x)**΄** ⇔  = (x)**΄**

τότε υπάρχει σταθερά c1∈ℜ, ώστε, για κάθε x∈(– 1,+ ∞)

 = x + c1.

Για x = 3, είναι  = x + c1, αλλά f (3) = , οπότε c1 = 1, είναι λοιπόν, για κάθε x∈(– 1,+ ∞)

 = x + 1 ⇔ f 2(x) =  ⇔ |f (x)| =  f (x) = .

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΣΕΚΟΥΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ ΕΛΛΑΣ**

**Ο ΑΝΕΡΧΟΜΕΝΟΣ ΗΓΕΤΗΣ**

**ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ**

**2310 93 94 31**