ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑTA ΓΙΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ

ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

f (x) = , x∈ℜ και g (x) = 1 – lnx, x∈(0,+ ∞).

(i) Nα αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η αντίστροφη της.

(ii) Nα υπολογίσετε τη σύνθεση f – 1og.

***Λύση:***

**(i)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ, με παράγωγο

f **΄**(x) =  = =

 =  =  > 0,

είναι λοιπόν

f **΄**(x) > 0, για κάθε x∈ℜ

συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο ℜ, οπότε η f είναι «1-1» στο ℜ,

επομένως η f είναι αντιστρέψιμη στο ℜ.

Εύρεση αντίστροφης της f.

Για κάθε x∈ℜ, υπάρχει y∈f (A) τέτοιο ώστε

y = f (x) ⇔ y =  ⇔ y =  

⇔ y⋅(1 + e – x) = 1 ⇔ y⋅+ y⋅e – x = 1 ⇔

⇔ y⋅e – x = 1 – y ⇔ e – x = ,

θα πρέπει

 > 0 ⇔ y⋅(1 – y) > 0 ⇔ 0 < y < 1,

τότε

e – x =  ⇔ e x =  ⇔ x = ln, y∈(0,1).

Με εναλλαγή του x με το y, θα είναι

y = ln, x∈(0,1).

Επομένως είναι

f – 1(x) = ln, = (0,1).

**(ii)** To πεδίο ορισμού της f – 1og, είναι

 = {x∈ℜ| x∈ και g (x)∈}.

* x∈⇔ x∈(0,+ ∞) ⇔ x > 0, (1).
* g (x)∈⇔ g (x)∈(0,1) ⇔ 0 < g (x) < 1 ⇔ 0 < 1 – lnx < 1 ⇔

⇔ 1 – lnx > 0 και 1 – lnx < 1 ⇔ lnx < 1 και lnx > 0 ⇔

⇔ x > e0 και x < e ⇔ x > 1 και x < e ⇔ 1 < x < e, (2).

Από τις (1) & (2), με συναλήθευση προκύπτει

0 < x < e.

Είναι λοιπόν

 = (0,e).

Για τον τύπο της σύνθεσης, εργαζόμαστε ως εξής

(f – 1og)(x) = f – 1(g(x)) = ln = ln = ln.

Συνεπώς

(f – 1og)(x) = ln, με  = (0,e).

ΘΕΜΑ B

Θεωρούμε τη παραγωγίσιμη συνάρτηση f:ℜ→ℜ, καθώς επίσης και τη

παραγωγίσιμη στο 0 συνάρτηση g, η οποία δίνεται από τον τύπο

g (x) = 

Nα υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτόμενων της f στο σημείο Α (0,f (0)).

***Λύση:***

Η f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ, τότε η f είναι παραγωγίσιμη και στο 0, οπότε

* υπάρχει το όριο = f ΄(0).
* η f είναι συνεχής στο 0, οπότε  = f (0).

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε η g είναι συνεχής στο 0,

οπότε

g (0) = 2f (0) + ln1 = 2f (0).

για το όριο  εξετάζουμε πλευρικά όρια

*  =  = f (0) + 1.
*  = = 2f (0) + ln1 = 2f (0).

Eφόσον η g είναι συνεχής στο 0, τότε

 =  = g (0) ⇔ 2f (0) = f (0) + 1 ⇔ f (0) = 1.

τότε θα είναι

g (0) = 2f (0) = 2

και

 = f ΄(0).

Mελετάμε τη παράγωγο της g στο 0, είναι

*  =  =  =

=  =  = – f ΄(0).

διότι



*  =  =  =

=  =  = 6f ΄(0) + 1.

διότι



και

   =  = 1.

Eφόσον η g είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε

 =  ⇔

– f ΄(0) = 6f ΄(0) + 1 ⇔ – 7f ΄(0) = 1 ⇔ f ΄(0) = .

Η εξίσωση της εφαπτόμενων της f στο σημείο Α (0,f (0)), είναι

(ε):y – f (0) = f ΄(0)⋅x ⇔ y – 1 = x ⇔ y = x + 1.

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΣΕΚΟΥΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ ΕΛΛΑΣ**

**Ο ΑΝΕΡΧΟΜΕΝΟΣ ΗΓΕΤΗΣ**

**ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ**

**2310 93 94 31**