ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑTA ΓΙΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ

ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Θεωρούμε τη συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει

x⋅f (x) – 4x3 + 2x + ημx = 0, για κάθε x∈ℜ.

**(i)** Να βρείτε

**(α)** τον τύπο της f, **(β)** το f (x).

**(ii)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

f (x) = 0,

έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

***Λύση:***

**(i)** **(α)** Για x ≠ 0 είναι

f (x) = 4x2 – 2 + .

Επίσης επειδή η f είναι συνεχής στο ℜ, τότε η f θα είναι συνεχής και στο 0, οπότε

f (0) = f (x),

όπου

f (x) =(4x2 – 2 + ) = – 1 ⇔ f (0) = – 1,

διότι  = 1.

Είναι λοιπόν

f (x) = 

**(β)** Για x < 0, είναι

f (x) = (4x2 – 2 + ) =  x2 (4 –  + ) = + ∞,

διότι  = 0.

**(ii)** Εφόσον

f (x) = + ∞, τότε υπάρχει αριθμός α < 0, ώστε f (α ) > 0.

Εφαρμόζουμε στη συνάρτηση f το Θεώρημα Βοlzano στο διάστημα [α,0].

* Η f είναι συνεχής στο [α,0].
* f (0)⋅f (α) < 0.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Βοlzano, η εξίσωση

f (x) = 0,

έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

ΘΕΜΑ B

Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο ℜ, με

f (x) < 0, για κάθε x∈ℜ.

Eάν η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο ℜ, να αποδείξετε η εξίσωση

2(x – 1)⋅f (x) = f (x – 1) + f (x + 1),

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (1,2).

***Λύση:***

Θεωρούμε τη συνάρτηση

g (x) = 2(x – 1)⋅f (x) – f (x – 1) – f (x + 1), x∈[1,2].

Eλέγχουμε εάν πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεώρηματος Βοlzαno (Θ.Β.) στη g στο διάστημα [1,2].

* Η g είναι συνεχής στο [1,2], ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
* g (1) = – f (0) – f (2) > 0, διότι f (x) < 0, για κάθε x∈ℜ.

Επίσης

g (2) = 2f (2) – f (1) – f (3)

Για να υπολογίσουμε το πρόσημο της τιμής

g (2),

εργαζόμαστε στην f

Eλέγχουμε εάν πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ.M.T. στην f στο [1,2].

* Η f είναι συνεχής στο [1,2], διότι f παραγωγίσιμη στο ℜ.
* Η f είναι παραγωγίσιμη στο (1,2).

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ1∈(1,2): f ΄(ξ1) = f (2) – f (1).

Eλέγχουμε εάν πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ.M.T. στην f [2,3].

* Η f είναι συνεχής στο [2,3], διότι f παραγωγίσιμη στο ℜ.
* Η f είναι παραγωγίσιμη στο (2,3).

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ2∈(2,3): f ΄(ξ2) = f (3) – f (2).

Επειδή

ξ1 < ξ2  f ΄(ξ1) < f ΄(ξ2) ⇔

⇔ f (2) – f (1) < f (3) – f (2) ⇔

⇔ 2f (2) – f (1) – f (3) < 0 ⇔ g (2) < 0.

Είναι λοιπόν g (1)⋅g (2) < 0.

Σύμφωνα με το Θ.Β. η εξίσωση

g (x) = 0 ⇔ 2(x – 1)⋅f (x) = f (x – 1) + f (x + 1),

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (1,2).

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΣΕΚΟΥΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ ΕΛΛΑΣ**

**Ο ΑΝΕΡΧΟΜΕΝΟΣ ΗΓΕΤΗΣ**

**ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ**

**2310 93 94 31**