ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑTA ΓΙΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ

ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Θέλουμε να κατασκευάσουμε, ένα κανάλι για να μεταφέρουμε ποσότητα

νερού. Η κάθετη διατομή του έχει το σχήμα του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



**(i)** Nα αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής είναι

E (θ) = 4ημθ⋅(1 + συνθ), θ∈(0,].

**(ii)** Να υπολογίσετε τη γωνία θ, ώστε το κανάλι να μεταφέρει τη μέγιστη

ποσότητα νερού.

**(iii)** Να κατασκευάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της

συνάρτησης Ε(θ).

**(iv)** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

E (θ) = 5,

***Λύση:***

**(i)** Το σχήμα της διατομής του καναλιού, είναι τραπέζιο, με

* Μικρή βάση

β = ΑΒ = 2 m και

* Μεγάλη βάση

Β = ΔΘ + ΘΗ + ΗΓ = 2 + 2x,

όπου ΘΗ = 2 m και ΔΘ = ΗΓ = x, διότι τα ορθ. τρίγωνα ΑΘΔ, ΒΗΓ είναι ίσα.

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΔ, για τη γωνία θ, ισχύει

ημθ =  ⇔ ημθ =  ⇔ υ = 2ημθ, με 0 < θ ≤ 

και

συνθ =  ⇔ συνθ =  ⇔ x = 2συνθ, με 0 < θ ≤ .

Το εμβαδόν του ισοσκελούς τραπεζίου, είναι

Ε =  =  = (2 + x)⋅υ =

= (2 + 2συνθ)⋅2ημθ = 4ημθ⋅(1 + συνθ).

Είναι λοιπόν

E (θ) = 4ημθ⋅(1 + συνθ), θ∈(0,].

**(ii)** Η συνάρτηση E (θ), είναι παραγωγίσιμη στο (0,], με παράγωγο

E ΄(θ) = [4ημθ⋅(1 + συνθ)]΄ = 4(ημθ)΄⋅(1 + συνθ) + 4ημθ⋅(1 + συνθ)΄=

= 4συνθ⋅(1 + συνθ) + 4ημθ⋅(– ημθ) = 4συνθ + 4συν2θ – 4ημ2θ =

= 4συνθ + 4συν2θ – 4(1 – συν2θ) = 4συνθ + 4συν2θ – 4 + 4συν2θ =

= 8συν2θ + 4συνθ – 4 = 4(2συν2θ + συνθ – 1) = 4(2συνθ – 1)( συνθ + 1),

λύνουμε την εξίσωση

E ΄(θ) = 0 ⇔ 4(2συνθ – 1)( συνθ + 1) = 0  2συνθ – 1 = 0 ⇔

⇔ συνθ =  ⇔ συνθ = συν ⇔ x = 2kπ +  ή x = 2kπ – , k∈Z.

Επειδή όμως

0 < x ≤ , τότε είναι x = .

Η συνάρτηση Ε ΄(θ), είναι συνεχής στο (0,] και έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (0,] τη x = , τότε σε κάθε ένα από τα διαστήματα

(0,] και [,],

θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

* Λαμβάνουμε ενδεικτική τιμή ∈(0,], είναι

E ΄() = 4(2συν2 + συν – 1) = 2(3 + ) > 0,

τότε

E ΄(θ) > 0, για κάθε x∈(0,].

* Λαμβάνουμε ενδεικτική τιμή ∈[,], είναι

E ΄() = 4(2συν2 + συν – 1) = – 4 < 0,

τότε

E ΄(θ) < 0, για κάθε x∈[,].

Συνοπτικά έχουμε τον πίνακα

|  |  |
| --- | --- |
| x | 0   |
|  |  **+** 0 **–** |
|  |  |  |

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η Ε(θ), παρουσιάζει στο , ολικό μέγιστο, το Ε() =  m2.

**(iii)** Για να κατασκευάσουμε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης Ε(θ), μελετάμε τη συνάρτηση ως προς τη κυρτότητα στο (0,].

Η συνάρτηση E ΄(θ), είναι παραγωγίσιμη στο (0,], με παράγωγο

E ΄΄(θ) = [8συν2θ + 4συνθ – 4]΄ = – 16συνθημθ – 4ημθ =

= – 4ημθ(1 + 4συνθ) > 0,

επομένως η Ε(θ), είναι κοίλη στο (0,].

Επίσης

 = [4ημθ⋅(1 + συνθ)] = 0 και Ε() = 4 m2.

Mια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης Ε(θ), δίνεται παρακάτω

**(iv)** Για να βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

E (θ) = 5, θ∈(0,],

θα υπολογίσουμε το πεδίο ορισμού της Ε (θ).

Εύρεση του συνόλου τιμών της Ε (θ).

**(Ι)** Δ1= (0,]. H Ε (θ) είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ1.

*  = [4ημθ⋅(1 + συνθ)] = 0.
* Ε () = .

To σύνολο τιμών της Ε (θ)στο Δ1, είναι

Ε (Δ1) = [0,).

Παρατηρούμε ότι το 5∈Ε (Δ1), οπότε η εξίσωση

Ε (θ) = 5,

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα Δ1

και εφόσον

η Ε (θ) είναι γνησίως αύξουσα στο Δ1,

τότε η εξίσωση

Ε (θ) = 5,

έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ1, **(1)**.

**(ΙΙ)** Δ2 = (,]. H Ε (θ) είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ2.

* Ε (θ) = [4ημθ⋅(1 + συνθ)] = .
* Ε () = 4.

To σύνολο τιμών της Ε (θ) στο Δ2, είναι

Ε (Δ2) = [4,).

Παρατηρούμε ότι το 5∈Ε (Δ2), οπότε η εξίσωση

Ε (θ) = 5,

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα Δ2

και εφόσον

η Ε (θ) είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ2,

τότε η εξίσωση

Ε (θ) = 5,

έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ2, **(2)**.

Από τις **(1)** & **(2)** προκύπτει ότι η εξίσωση

E (θ) = 5, έχει ακριβώς δύο ρίζες στο (0,].

ΘΕΜΑ B

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση

f (x) = , με λ > 0.

**(i)** Nα αποδείξετε ότι λ = 1.

**(ii)** Να εξετάσετε εάν η f είναι παραγωγίσιμη.

***Λύση:***

Η f είναι συνεχής στο ℜ, τότε η f θα είναι συνεχής και στο 1.

Μελετάμε τη συνέχεια της f στο 1, με τον ορισμό

* f (1) = λ2 + .
*  =  = λ2 + .
*  =  = λ + .

Eπειδή λοιπόν η f είναι συνεχής στο 1, θα ισχύει

 =  = f (1) ⇔ λ + eλ – 1 = λ2 + , **(1)**.

Για να υπολογίσουμε το λ, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση **(1)**.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

g (x) = x + ex – 1, x∈ℜ

τότε η εξίσωση **(1)**, παίρνει τη μορφή

g (λ2) = g (λ).

Η g είναι παραγωγίσιμη στο ℜ, με παράγωγο

g**΄**(x) = (x + ex – 1)΄ = 1 + ex – 1 > 0.

Είναι λοιπόν

g**΄**(x) > 0, για κάθε x∈ℜ,

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο ℜ, οπότε η g είναι «1-1» στο ℜ,

τότε η εξίσωση **(1)**, λύνεται ως εξής

g (λ2) = g (λ)  λ2 = λ  λ = 1.

Για λ = 1, η f παίρνει τη μορφή

f (x) = .

**(ii)** Μελετάμε τη παράγωγο της f στο ℜ.

Εάν x∈(– ∞,1), f (x) = x2 + x, η f παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, με παράγωγο

f ΄(x) = (x2 + x)΄ = 2x + 1.

Εάν x∈(1,+ ∞), f (x) = x3 + x, η f παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, με παράγωγο

f ΄(x) = (x3 + x)΄ = 3x2 + 1.

Μελετάμε τη παράγωγο της f στο 1, με τον ορισμό

* f (1) = 2.
*  =    = 3.
*  =    =  = 4.

Eπειδή λοιπόν

 ≠ ,

τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Είναι λοιπόν

f ΄(x) = .

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΣΕΚΟΥΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ ΕΛΛΑΣ**

**Ο ΑΝΕΡΧΟΜΕΝΟΣ ΗΓΕΤΗΣ**

**ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ**

**2310 93 94 31**