ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ
ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Θεωρούμε συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει

$$f^5(x) + f(x) = x^3, \text{ για κάθε } x\in\Re.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Λύση:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$

Εφόσον, για κάθε $x\in\Re$, ισχύει

$$f^5(x) + f(x) = x^3,$$

θέτουμε, για x = 0 στην τελευταία ισότητα, τότε

$$f^5(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)\cdot(f^4(0) + 1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0, \textbf{(1)},$$

διότι

$$f^4(0) + 1 \neq 0.$$

Επίσης, για κάθε $x\in\Re$ είναι

$$f^5(x) + f(x) = x^3 \Leftrightarrow f(x)\cdot(f^4(x)+1) = x^3 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{1+f^4(x)},$$

διότι

$$f^4(x) + 1\neq 0, \text{ για κάθε } x\in\Re.$$

Είναι λοιπόν

$$|f(x)| = \left|\frac{x^3}{1+f^4(x)}\right| = \frac{|x^3|}{|1+f^4(x)|} = \frac{|x|^3}{1+f^4(x)} \le |x|^3, \textbf{(1)}$$

διότι

$$f^4(x) + 1 > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f^4(x)+1} < 1, \text{ για κάθε } x\in\Re.$$

Από την (1) ισοδύναμα προκύπτει

$$|f(x)| \le |x|^3 \Leftrightarrow -|x|^3 \le f(x) \le |x|^3, \text{για κάθε } x\in\Re.$$

$$\lim_{x\to 0}(-|x|^3) = 0 \text{ και } \lim_{x\to 0}(|x|^3) = 0.$$

Σύμφωνα λοιπόν με το **κριτήριο παρεμβολής** είναι $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, **(2)**.

Από την **(1)** & **(2)** προκύπτει

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0),$$

άρα η f είναι συνεχής στο 0.

ΘΕΜΑ Β

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^3 - 7x + 3 = 0,$$

έχει *ακριβώς* 3 ρίζες στο $\Re$.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 7x + 3,\ x \in \Re.$$

Εφόσον η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο $3^{ου}$, άρα η εξίσωση

$$f(x) = 0,$$

έχει το πολύ 3 ρίζες στο $\Re$ **(1)**, αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση

$$f(x) = 0,$$

έχει τουλάχιστον 3 ρίζες στο $\Re$.

Επιλέγουμε συγκεκριμένα διαστήματα στο $\Re$ ώστε να πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano!

Εφαρμόζουμε στην συνάρτηση f το Θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-3,0]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[-3,0]$, ως πολυωνυμική.
- $f(-3) = -3$ και $f(0) = +3$, άρα $f(-3)\cdot f(0) < 0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-3,0): f(x_0) = 0$, δηλαδή η εξίσωση

$$f(x) = 0,$$

έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο $(-3,0)$.

Εφαρμόζουμε στην συνάρτηση f το Θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[0,1]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.
- $f(0) = +3$ και $f(1) = -3$, άρα $f(0)\cdot f(1) < 0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0,1): f(x_1) = 0$, δηλαδή η εξίσωση

$$f(x) = 0,$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Εφαρμόζουμε στην συνάρτηση f το Θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[1,2]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$.
- $f(1) = -3$ και $f(2) = +4$, άρα $f(1)\cdot f(2) < 0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (1,2): f(x_2) = 0$,

δηλαδή η εξίσωση

$$f(x) = 0,$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2).

Συνεπώς η εξίσωση

$$f(x) = 0,$$

έχει τουλάχιστον 3 ρίζες στο $\Re$. **(2)**.

Από τις περιπτώσεις **(1) & (2)** προκύπτει ότι η εξίσωση

$$f(x) = 0,$$

έχει ακριβώς 3 ρίζες στο $\Re$.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΣΕΚΟΥΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ ΕΛΛΑΣ
Ο ΑΝΕΡΧΟΜΕΝΟΣ ΗΓΕΤΗΣ
ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ
2310 93 94 31