ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑTA ΓΙΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ

ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Θεωρούμε συνάρτηση f:ℜ→ℜ για την οποία ισχύει

f 5(x) + f (x) = x3, για κάθε x∈ℜ.

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

***Λύση:***

Αρκεί να αποδείξουμε ότι,

f (x) = f (0).

Eφόσον, για κάθε x∈ℜ, ισχύει

f 5(x) + f (x) = x3 ,

θέτουμε, για x = 0 στην τελευταία ισότητα, τότε

f 5(0) + f(0) = 0 ⇔ f (0)⋅(f 4(0) + 1) = 0 ⇔ f (0) = 0, **(1)**,

διότι

f 4(0) + 1 ≠ 0.

Επίσης, για κάθε x∈ℜ είναι

f 5(x) + f (x) = x3 ⇔f (x)⋅(f 4(x)+1) = x3 ⇔ f (x) = ,

διότι

f 4(x) + 1≠0, για κάθε x∈ℜ.

Eίναι λοιπόν

 =  =  **(1)**

διότι

f 4(x) + 1 > 1 ⇔ , για κάθε x∈ℜ.

Από την (1) ισοδύναμα προκύπτει

 ⇔ ,για κάθε x∈ℜ.

 και .

Σύμφωνα λοιπόν με το **κριτήριο παρεμβολής** είναι**(2)**.

Από την **(1)** & **(2)** προκύπτει

f (x) = f (0),

άρα η f είναι συνεχής στο 0.

ΘΕΜΑ B

Nα αποδείξετε ότι η εξίσωση

x3 – 7x + 3 = 0,

έχει *ακριβώς* 3 ρίζες στο ℜ.

***Λύση:***

Θεωρούμε τη συνάρτηση

f (x) = x3– 7x+3, x∈ℜ.

Εφόσον η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο 3ου, άρα η εξίσωση

f (x)=0,

έχει το πολύ 3 ρίζες στο ℜ **(1)**, αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση

f (x) = 0,

έχει τουλάχιστον 3 ρίζες στο ℜ.

**Επιλέγουμε συγκεκριμένα διαστήματα στο ℜ ώστε να πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Βοlzαno!**

Εφαρμόζουμε στην συνάρτηση f το Θεώρημα Βοlzαno στο διάστημα [– 3,0].

* Η f είναι συνεχής στο [– 3,0], ως πολυωνυμική.
* f (– 3) = – 3 και f (0) = + 3, άρα f (– 3)∙f (0) < 0.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Βοlzαno, υπάρχει ένα τουλάχιστον x0∈(– 3,0):f (x0) = 0, δηλαδή η εξίσωση

f (x) = 0,

έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο (–3,0).

Εφαρμόζουμε στην συνάρτηση f το Θεώρημα Βοlzαno στο διάστημα [0,1].

* Η f είναι συνεχής στο [0,1].
* f (0) = + 3 και f (1) = – 3, άρα f (0)∙f (1)< 0.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Βοlzαno, υπάρχει ένα τουλάχιστον x1∈(0,1): f (x1) = 0,

δηλαδή η εξίσωση

f (x) = 0,

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).

Εφαρμόζουμε στην συνάρτηση f το Θεώρημα Βοlzαno στο διάστημα [1,2].

* Η f είναι συνεχής στο [1,2].
* f (1) = – 3 και f (2) = + 4, άρα f (1)⋅f (2) < 0.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Βοlzαno, υπάρχει ένα τουλάχιστον x2∈(1,2): f (x2) = 0,

δηλαδή η εξίσωση

f (x) = 0,

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2).

Συνεπώς η εξίσωση

f (x) = 0,

έχει τουλάχιστον 3 ρίζες στο ℜ. **(2)**.

Από τις περιπτώσεις **(1)** **&** **(2)** προκύπτει ότι η εξίσωση

f (x) = 0,

έχει ακριβώς 3 ρίζες στο ℜ.

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΣΕΚΟΥΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ ΕΛΛΑΣ**

**Ο ΑΝΕΡΧΟΜΕΝΟΣ ΗΓΕΤΗΣ**

**ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ**

**2310 93 94 31**