ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑTA ΓΙΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ

ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

f (x) = , x∈ℜ και g (x) = 1 – lnx, x∈(0,+ ∞).

**(i)** Nα αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η αντίστροφη της.

**(ii)** Nα υπολογίσετε τη σύνθεση f – 1og.

***Λύση:***

 **(i)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ, με παράγωγο

f **΄**(x) =  = =

 =  =  > 0,

είναι λοιπόν

f **΄**(x) > 0, για κάθε x∈ℜ

συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο ℜ, οπότε η f είναι «1-1» στο ℜ,

επομένως η f είναι αντιστρέψιμη στο ℜ.

Εύρεση αντίστροφης της f.

Για κάθε x∈ℜ, υπάρχει y∈f (A) τέτοιο ώστε

y = f (x) ⇔ y =  ⇔ y =  

⇔ y⋅(1 + e – x) = 1 ⇔ y⋅+ y⋅e – x = 1 ⇔

⇔ y⋅e – x = 1 – y ⇔ e – x = ,

θα πρέπει

 > 0 ⇔ y⋅(1 – y) > 0 ⇔ 0 < y < 1,

τότε

e – x =  ⇔ e x =  ⇔ x = ln, y∈(0,1).

Με εναλλαγή του x με το y, θα είναι

y = ln, x∈(0,1).

Επομένως είναι

f – 1(x) = ln, = (0,1).

**(ii)** To πεδίο ορισμού της f – 1og, είναι

 = {x∈ℜ| x∈ και g (x)∈}.

* x∈⇔ x∈(0,+ ∞) ⇔ x > 0, (1).
* g (x)∈⇔ g (x)∈(0,1) ⇔ 0 < g (x) < 1 ⇔ 0 < 1 – lnx < 1 ⇔

⇔ 1 – lnx > 0 και 1 – lnx < 1 ⇔ lnx < 1 και lnx > 0 ⇔

⇔ x > e0 και x < e ⇔ x > 1 και x < e ⇔ 1 < x < e, (2).

Από τις (1) & (2), με συναλήθευση προκύπτει

0 < x < e.

Είναι λοιπόν

 = (0,e).

Για τον τύπο της σύνθεσης, εργαζόμαστε ως εξής

(f – 1og)(x) = f – 1(g(x)) = ln = ln = ln.

Συνεπώς

(f – 1og)(x) = , με  = (0,e).

ΘΕΜΑ B

Θεωρούμε τη συνάρτηση

f (x) = x – , x > 0.

**(i)** Nα μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**(ii)** Nα μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**(iii)** Nα βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

x2 – 2022x – lnx = 0.

**(iv)** Nα βρείτε τις ασύμπτωτες της f και να σχηματίσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της.

***Λύση:***

 **(i)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+ ∞), με παράγωγο

f **΄**(x) =  = 1 –  = 

Θεωρούμε τη συνάρτηση

g (x) = x2 – 1 + lnx, x∈(0,+ ∞),

τότε είναι

f **΄**(x) =.

Μελετάμε τη συνάρτηση g στο (0,+ ∞).

* Η g είναι παραγωγίσιμη στο (0,+ ∞), με παράγωγο

g **΄**(x) = (x2 – 1 + lnx)΄ = 2x +  > 0.

Είναι λοιπόν

g **΄**(x) > 0, για κάθε x∈(0,+ ∞),

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+ ∞), τότε η εξίσωση g (x) = 0, έχει

το πολύ μία ρίζα στο (0,+ ∞) (1).

* Παρατηρούμε επίσης ότι για x = 1, είναι g (1) = 0, τότε η εξίσωση g (x) = 0,

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,+ ∞) (2).

Από τις (1) & (2) προκύπτει ότι η εξίσωση

g (x) = 0, έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,+ ∞), το 1.

Επειδή ισχύει δε

f **΄**(x) = x∈(0,+ ∞),

τότε το 1, είναι και μοναδική ρίζα της εξίσωσης f **΄**(x) = 0, επίσης

* για 0 < x < 1  g (x) < g (1)  g (x) < 0 ⇔ f **΄**(x) = < 0,
* για x > 1  g (x) > g (1)  g (x) > 0 ⇔ f **΄**(x) = > 0.

Συνοπτικά έχουμε τον πίνακα

|  |  |
| --- | --- |
| x | 0 1 + ∞ |
|  |  **–** 0 **+** |
|  |  |  |

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1], γνησίως αύξουσα στο [1,+ ∞). H f παρουσιάζει στο 1, τοπικό ελάχιστο

το f (1) = 1.

**(ii)** Η f **΄** είναι παραγωγίσιμη στο (0,+ ∞), με

f **΄΄**(x) =  =  =

=  =  =

=  = 

λύνουμε την εξίσωση

f **΄΄** (x) = 0 ⇔  = 0⇔ 3 – 2lnx = 0 ⇔ lnx =  ⇔ x = ,

επίσης

f **΄΄** (x) > 0 ⇔  3 – 2lnx > 0 ⇔ lnx <  ⇔ x < .

Συνοπτικά έχουμε τον πίνακα

|  |  |
| --- | --- |
| x | 0  + ∞ |
|  |  **+** 0 **–** |
|  |  |  |

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η f, στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο (0,], στρέφει τα κοίλα κάτω (κοίλη) στο [,+ ∞). H f παρουσιάζει στο , σημείο καμπής το f () = 

**(iii)** Η εξίσωση x2 – 2022x – lnx = 0, ισοδύναμα, για κάθε x∈(0,+ ∞), γίνεται

x2 – lnx = 2022x  x –  = 2022 ⇔ f (x) = 2022.

Για να βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f (x) = 2022, αρκεί να βρούμε το σύνολο τιμών της εξίσωσης f (x) = 2022.

Εύρεση του συνόλου τιμών της f.

**(Ι)** Δ1 = (0,1]. H f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ1.

* f (x) = = + ∞, διότι  = – ∞,

αφού  = + ∞ &  = + ∞.

* f (1) = 1.

To σύνολο τιμών της f στο διάστημα Δ1 είναι f (Δ1) = [1,+ ∞).

**(ΙΙ)** Δ2 = (1,+ ∞). H f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ2.

* f (x) =  = 1.
* f (x) == + ∞, διότι == 0.

To σύνολο τιμών της f στο διάστημα Δ2 είναι f (Δ2) = (1,+ ∞).

Παρατηρούμε ότι το 2022∈f (Δ1), οπότε

η εξίσωση f (x) = 2022, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα Δ1

και εφόσον

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ1,

τότε η εξίσωση f (x) = 2022, έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ1, υπάρχει δηλαδή μοναδικός αριθμός x1∈ Δ1: f (x1) = 2022, (1).

Παρατηρούμε επίσης ότι το 2022∈f (Δ2), οπότε

η εξίσωση f (x) = 2022, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα Δ2

και εφόσον

η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ2,

τότε η εξίσωση f (x) = 2022, έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ2, υπάρχει δηλαδή μοναδικός αριθμός x2∈ Δ2: f (x2) = 2022, (2).

Από τις (1) & (2) προκύπτει ότι η εξίσωση

f (x) = 2022,

ισοδύναμα και η εξίσωση

x2 – 2022x – lnx = 0.

έχει ακριβώς δύο ρίζες στο (0,+ ∞).

**(iv)** Αναζητάμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0, είναι

f (x) = = + ∞,

διότι  = – ∞,

Συνεπώς η ευθεία (ε): x = 0, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

Αναζητάμε πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη στο + ∞, είναι

f (x) == + ∞,

διότι == 0.

Συνεπώς η f δεν έχει ασύμπτωτες στο + ∞.

Ακολουθεί μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f.



**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΣΕΚΟΥΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ ΕΛΛΑΣ**

**Ο ΑΝΕΡΧΟΜΕΝΟΣ ΗΓΕΤΗΣ**

**ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ**

**2310 93 94 31**