ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑTA ΓΙΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ

ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση

f (x) = , με α > 0.

**(i)** Να αποδείξετε ότι α = 2.

**(ii)** Για α = 2, να εξετάσετε εάν η f είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί η f ΄(x).

***Λύση:***

**(i)** Επειδή η f είναι συνεχής στο ℜ, τότε η f είναι συνεχή στο 0, οπότε ισχύει

 =  = f (0).

Mελετάμε τη συνέχεια της f στο 0, με τον ορισμό, είναι f (0) = .

*  =  = .
*  =  =  = – 1.

Είναι λοιπόν

 =  = f (0) ⇔  = – 1 ⇔ α = 2.

Για α = 2, η f παίρνει τη μορφή

f (x) = .

**(ii)** **(Ι)** Εάν x∈(– ∞,0), η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με παράγωγο

f ΄(x) =  =  =

=  =  =

=  = .

**(ΙΙ)** Εάν x∈(0,+ ∞), η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με παράγωγο

f ΄(x) =  =  =

=  =  =

=  = .

**(ΙΙΙ)** Mελετάμε τη παραγωγισιμότητα της f στο 0, με τον ορισμό, είναι f (0) = – 1.

*  =  =  =

=  = =  = 0.

*  =  =  =

=  = =  = 0.

Επειδή

 =  = 0,

τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με f ΄(0)= 0.

Συνεπώς η f παραγωγίσιμη στο ℜ, με παράγωγο

f ΄(x) = .

ΘΕΜΑ B

Θεωρούμε δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g:ℜ→ℜ, για τις οποίες ισχύει

f (x)⋅g (x) = x⋅g2(x) + x, για κάθε x∈ℜ.

Εάν η g διέρχεται από το σημείο A(x0,3) στο οποίο η εφαπτομένη της είναι

παράλληλη στο άξονα x΄x. Nα αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της f στο σημείο της B(x0,f (x0)), είναι κάθετη στην ευθεία (ε): 3x + 10y – 7 = 0.

***Λύση :***

Από τα δεδομένα έχουμε ότι,

η g διέρχεται από το σημείο A(x0,3), στο οποίο η εφαπτομένη της

είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, τότε

g (x0) = 3 και g ΄(x0) = 0, **(1)**.

Επίσης ισχύει η ισότητα

f (x)⋅g (x) = x⋅g2(x) + x, για κάθε x∈ℜ

επειδή f, g παραγωγίσιμες στο ℜ, παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της τελευταίας

ισότητας

[f (x)⋅g (x)]΄ = [x⋅g2(x) + x]΄ ⇔

⇔ f ΄(x)⋅g (x) + f (x)⋅g΄(x) = g2(x) + 2x⋅g (x)⋅g΄(x) + 1.

Eάν στην παραπάνω ισότητα θέσουμε x = x0, έχουμε

f ΄(x0)⋅g (x0) + f (x0)⋅g΄(x0) = g2(x0) + 2x0⋅g (x0)⋅g΄(x0) + 1, λόγω των **(1)**.

προκύπτει

3f ΄(x0) = 10 ⇔ f ΄(x0) = .

* Η ευθεία (ε): 3x + 10y – 7 = 0, έχει συντελεστή διεύθυνσης λ1 = – .
* Η εφαπτομένη της f στο σημείο της Β(x0,f (x0)), έχει συντελεστή διεύθυνσης

λ2 = f ΄(x0) = .

Παρατηρούμε ότι

λ1⋅λ2 =  = – 1.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο της Β (x0,f (x0)), είναι κάθετη

στην ευθεία (ε).