ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ
ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot e^{-x},\ x \in \Re.$$

(i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία – ακρότατα.
(ii) Να μελετηθεί η f ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
(iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f και να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράστασης.

Λύση:

(i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, με παράγωγο

$$f'(x) = [(x-1)^2 \cdot e^{-x}]' = [(x-1)^2]' \cdot e^{-x} + (x-1)^2 \cdot (e^{-x})' =$$
$$= 2(x-1) \cdot e^{-x} - (x-1)^2 \cdot e^{-x} = [2(x-1) - (x-1)^2] \cdot e^{-x} =$$
$$= (2x - 2 - x^2 + 2x - 1) \cdot e^{-x} = (-x^2 + 4x - 3) \cdot e^{-x},$$

λύνουμε την εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (-x^2 + 4x - 3) \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3,$$

επίσης

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (-x^2 + 4x - 3) \cdot e^{-x} > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

Συνοπτικά έχουμε τον πίνακα

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και στο $[3,+\infty)$, γνησίως αύξουσα στο $[1,3]$.

Η f παρουσιάζει στο 1, τοπικό ελάχιστο το $f(1) = 0$, επίσης η f παρουσιάζει στο 0, τοπικό μέγιστο το $f(3) = 4e^{-2}$.

(ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, με

$$f''(x) = [(-x^2 + 4x - 3) \cdot e^{-x}]' = (-x^2 + 4x - 3)' \cdot e^{-x} + (-x^2 + 4x - 3) \cdot (e^{-x})' =$$
$$= (-2x + 4) \cdot e^{-x} - (-x^2 + 4x - 3) \cdot e^{-x} = [(-2x + 4) - (-x^2 + 4x - 3)] \cdot e^{-x} =$$
$$= (-2x + 4 + x^2 - 4x + 3) \cdot e^{-x} = (x^2 - 6x + 7) \cdot e^{-x},$$

λύνουμε την εξίσωση

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 7)\cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{2} \quad \text{ή} \quad x = 3 + \sqrt{2}\,.$$

επίσης

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 7)\cdot e^{-x} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < 3 - \sqrt{2} \quad \text{ή} \quad x > 3 + \sqrt{2}\,.$$

Συνοπτικά έχουμε τον πίνακα

x	$-\infty$		$3-\sqrt{2}$		$3+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο $(-\infty, 3-\sqrt{2}\,]$ και στο $[3+\sqrt{2}, +\infty)$, στρέφει τα κοίλα κάτω (κοίλη) στο $[3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}\,]$. Η f παρουσιάζει στο $3-\sqrt{2}$ και στο $3+\sqrt{2}$, σημεία καμπής.

(iii) Η f είναι συνεχής στο $\Re$, οπότε η f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Αναζητάμε πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)^2e^{-x}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-2x+1)e^{-x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)e^{-x} = -\infty,$$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$.

Συνεπώς η f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$.

Αναζητάμε πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2e^{-x}}{x} \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)^2}{xe^x} \underset{D.H.}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{[(x-1)^2]'}{(xe^x)'} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2(x-1)}{(x+1)e^x} \underset{D.H.}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{[2(x-1)]'}{[(x+1)e^x]'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{(x+2)e^x} = 0.$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Επειδή λ = 0, η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο + ∞, είναι επίσης

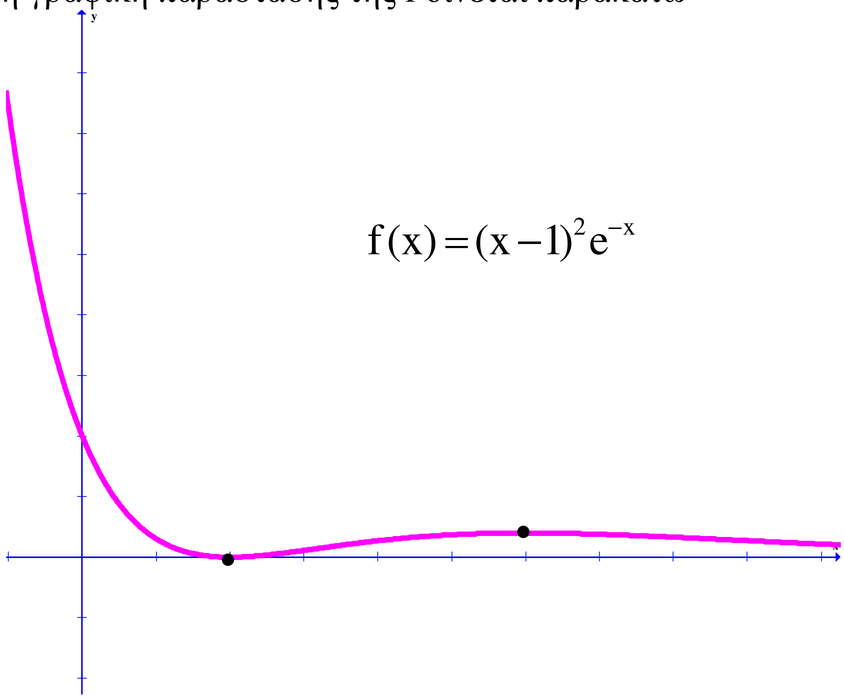
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x-1)^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2}{e^x} \underset{D.H.}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{[(x-1)^2]'}{(e^x)'} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2(x-1)}{e^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{[2(x-1)]'}{(e^x)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^x} = 0.$$

Συνεπώς η ευθεία

$$(\varepsilon): y = 0,$$

είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο + ∞.
Μια πρόχειρη γραφική παράστασης της f δίνεται παρακάτω



ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x + 1 & , x < 0 \\ \lambda - \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι λ = 2.
(ii) (α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα της και να σχεδιάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f.
(iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f (x) = 2, έχει μοναδική ρίζα το 0 και στη συνέχεια ότι η εξίσωση

$f(f(x) - \lambda) = 2$, έχει δύο ακριβώς ρίζες, ετερόσημες, όπου λ < 0.

Λύση:

(i) Επειδή η f είναι συνεχής στο ℜ, τότε η f είναι συνεχής στο 0.
Μελετάμε τη συνέχεια στο 0, με τον ορισμό, είναι

- f (0) = λ.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (e^x + x + 1) = 2.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} [\lambda - \ln(x + 1)] = \lambda.$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, θα ισχύει

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

Συνεπώς για α = λ, η f είναι συνεχής στο $\Re$, τότε η f παίρνει τη μορφή

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x + 1 & , x < 0 \\ 2 - \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}.$$

(ii) **(α)** Εάν $x\in(-\infty,0)$, τότε

$$f(x) = e^x + x + 1,$$

η f είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με παράγωγο

$$f'(x) = (e^x + x + 1)' = e^x + 1 > 0,$$

συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$.

Εάν $x\in(0,+\infty)$, τότε

$$f(x) = 2 - \ln(x + 1),$$

η f είναι παραγωγίσιμη, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με παράγωγο

$$f'(x) = [2 - \ln(x + 1)]' = -\frac{1}{x+1} < 0,$$

συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Μελετάμε τη παράγωγο της f στο 0, με τον ορισμό, είναι f (0) = 2.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x + x - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{D.H.}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(e^x + x - 1)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0^-} (e^x + 1) = 2.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cancel{2} - \ln(x+1) - \cancel{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\ln(x+1)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{D.H.}}{=}}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{[-\ln(x+1)]'}{(x)'} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = -1.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x},$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, οπότε το 0, είναι κρίσιμο σημείο της f.

Είναι λοιπόν

$$f'(x) = \begin{cases} e^x + 1 & , x < 0 \\ -\dfrac{1}{x+1}, & x > 0 \end{cases}.$$

Συνοπτικά έχουμε τον πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	↗		↘

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Η f παρουσιάζει στο 0, τοπικό (ολικό) μέγιστο το $f(0) = 2$.

(β) Εάν $x\in(-\infty,0)$, η f', είναι παραγωγίσιμη, με

$$f''(x) = (e^x + 1)' = e^x > 0,$$

συνεπώς η f στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο $(-\infty,0)$.

Εάν $x\in(0,+\infty)$, η f', είναι παραγωγίσιμη, με

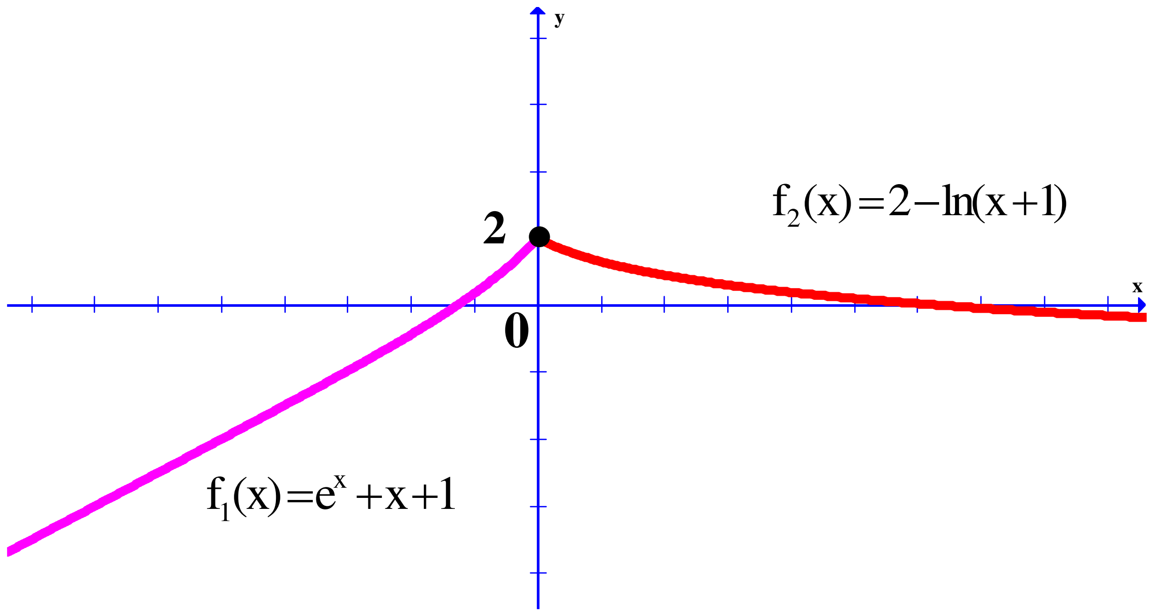
$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0,$$

συνεπώς η f στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο $(0,+\infty)$.

Για να σχηματίσουμε μία πρόχειρη γραφική παράσταση της f, μελετάμε τη συμπεριφορά της στο άπειρο, είναι

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x + x + 1) = -\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [2 - \ln(x + 1)] = -\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x + 1) = +\infty$.

Ακολουθεί μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f.



(iii) Η f παρουσιάζει στο 0, ολικό μέγιστο ισχύει λοιπόν ο ορισμός του ολικού μεγίστου, είναι δηλαδή

$$f(x) \le f(0) \Leftrightarrow f(x) \le 2, \text{ για κάθε } x \in \Re$$

όπου η ισότητα $f(x) = 2$, ισχύει μόνο για $x = 0$.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 2$, έχει μοναδική ρίζα το 0.

Για την εξίσωση

$$f(f(x) - \lambda) = 2,$$

δεδομένου ότι η εξίσωση $f(x) = 2$, έχει μοναδική ρίζα το 0, θα είναι

$$f(x) - \lambda = 0 \Leftrightarrow f(x) = \lambda.$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η εξίσωση

$$f(x) = \lambda, \text{ όπου } \lambda < 0.$$

έχει δύο ακριβώς ρίζες, ετερόσημες.

Εύρεση του συνόλου τιμών της f.

(I) $\Delta_1 = (-\infty, 0]$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + x + 1) = -\infty$, διότι $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ και
- $f(0) = 2$.

Το σύνολο τιμών της f στο Δ_1, είναι $f(\Delta_1) = (-\infty, 2]$.

(II) $\Delta_2 = (0, +\infty)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_2.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (e^x + x + 1) = 2$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [2 - \ln(x + 1)] = -\infty$, διότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x + 1) = +\infty$.

Το σύνολο τιμών της f στο Δ_2, είναι $f(\Delta_2) = (-\infty, 2)$.

Συνεπώς για την εξίσωση

$$f(x) = \lambda, \text{ όπου } \lambda < 0,$$

παρατηρούμε ότι το $\lambda \in f(\Delta_1)$, οπότε

η εξίσωση $f(x) = \lambda$, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα Δ_1

και εφόσον

η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1,

τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$, έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_1, υπάρχει δηλαδή μοναδικός αριθμός $x_1 \in \Delta_1 = (-\infty, 0]$: $f(x_1) = \lambda$, με $x_1 < 0$.

Επίσης παρατηρούμε ότι το $\lambda \in f(\Delta_2)$, οπότε

η εξίσωση $f(x) = \lambda$, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα Δ_2

και εφόσον

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2,

τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$, έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_2, υπάρχει δηλαδή μοναδικός αριθμός $x_2 \in \Delta_2 = (0, +\infty)$: $f(x_2) = \lambda$, με $x_2 > 0$.

Από τις (1) & (2) προκύπτει ότι η εξίσωση

$$f(x) = \lambda, \text{ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο } \Re, \text{ ετερόσημες.}$$