ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑTA ΓΙΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ

ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Θεωρούμε τη συνάρτηση

f (x) = (x – 1)2⋅e – x, x∈ℜ.

**(i)** Nα μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία – ακρότατα.

**(ii)** Nα μελετηθεί η f ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**(iii)** Nα βρείτε τις ασύμπτωτες της f και να κάνετε μια πρόχειρη γραφική

παράστασης.

***Λύση:***

**(i)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ, με παράγωγο

f **΄**(x) = [(x – 1)2⋅e – x]΄ = [(x – 1)2]΄⋅e – x + (x – 1)2⋅(e – x)΄ =

= 2(x – 1)⋅e – x – (x – 1)2⋅e – x = [2(x – 1) – (x – 1)2]⋅e – x =

= (2x – 2 – x2 + 2x – 1)⋅e – x = (– x2 + 4x – 3)⋅e – x,

λύνουμε την εξίσωση

f **΄**(x) = 0 ⇔ (– x2 + 4x– 3)⋅e – x = 0 ⇔ – x2 + 4x – 3 = 0 ⇔

⇔ x2 – 4x + 3 = 0 ⇔ x = 1 ή x = 3,

επίσης

f **΄**(x) > 0 ⇔ (– x2 + 4x– 3)⋅e – x > 0 ⇔ – x2 + 4x – 3 > 0 ⇔

⇔ x2 – 4x + 3 < 0 ⇔ 1 < x < 3.

Συνοπτικά έχουμε τον πίνακα

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | – ∞ 1 3 + ∞ | | |
|  | **–** 0 **+**  0 **–** | | |
|  |  |  |  |

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

στο (– ∞,1] και στο [3,+ ∞), γνησίως αύξουσα στο [1,3].

H f παρουσιάζει στο 1, τοπικό ελάχιστο το f (1) = 0, επίσης η f παρουσιάζει

στο 0, τοπικό μέγιστο το f (3) = 4e– 2.

**(ii)**Η f **΄**είναι παραγωγίσιμη στο ℜ, με

f **΄΄**(x) =[(– x2 + 4x – 3)⋅e – x]΄ = (– x2 + 4x – 3)΄⋅e – x + (– x2 + 4x – 3)⋅(e – x)΄ =

= (– 2x + 4)⋅e – x – (– x2 + 4x – 3)⋅e – x = [(– 2x + 4) – (– x2 + 4x – 3)]⋅e – x =

= (– 2x + 4 + x2 – 4x + 3)⋅e – x = (x2 – 6x + 7)⋅e – x,

λύνουμε την εξίσωση

f **΄΄** (x) = 0 ⇔ (x2 – 6x + 7)⋅e – x = 0 ⇔ x2 – 6x + 7 = 0 ⇔

⇔ x = 3 –  ή x = 3 + .

επίσης

f **΄΄** (x) > 0 ⇔ (x2 – 6x + 7)⋅e – x > 0 ⇔ x2 – 6x + 7 > 0 ⇔

⇔ x < 3 –  ή x > 3 + .

Συνοπτικά έχουμε τον πίνακα

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | – ∞   + ∞ | | |
|  | **+** 0 **–** 0 **+** | | |
|  |  |  |  |

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο (– ∞,3 – ] και στο [3 + ,+ ∞), στρέφει τα κοίλα κάτω

(κοίλη) στο [3 – ,3 + ]. H f παρουσιάζει στο 3 – και στο 3 + , σημεία καμπής.

**(iii)** Η f είναι συνεχής στο ℜ, οπότε η f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Αναζητάμε πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη της f στο – ∞.

 =  =

=  = – ∞,

διότι  = + ∞ και  = – ∞.

Συνεπώς η f δεν έχει ασύμπτωτες στο – ∞.

Αναζητάμε πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη της f στο + ∞.

 =     =

=  =  = 0.

διότι  = + ∞.

Επειδή λ = 0, η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο + ∞, είναι επίσης

f (x) =  =   =

=  =  =  = 0.

Συνεπώς η ευθεία

(ε): y = 0,

είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο + ∞.

Μια πρόχειρη γραφική παράστασης της f δίνεται παρακάτω



ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση

f (x) =.

**(i)** Nα αποδείξετε ότι λ = 2.

**(ii) (α)** Nα μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**(β)** Να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα της και να σχεδιάσετε μια

πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

**(iii)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f (x) = 2, έχει μοναδική ρίζα το 0 και στη

συνέχεια ότι η εξίσωση

f (f (x) –λ) = 2, έχει δύο ακριβώς ρίζες, ετερόσημες, όπου λ < 0.

***Λύση:***

**(i)** Επειδή η f είναι συνεχής στο ℜ, τότε η f είναι συνεχής στο 0.

Μελετάμε τη συνέχεια στο 0, με τον ορισμό, είναι

* f (0) = λ.
* f (x) = (ex + x + 1) = 2.
* f (x) = [λ – ln(x + 1)] = λ.

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, θα ισχύει

f (x) = f (x) = f (0) ⇔ λ = 2.

Συνεπώς για α = λ, η f είναι συνεχής στο ℜ, τότε η f παίρνει τη μορφή

f (x) = .

**(ii)** **(α)** Εάν x∈(– ∞,0), τότε

f (x) = ex + x + 1,

η f είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με παράγωγο

f **΄**(x) = (ex + x + 1)**΄**= ex + 1 > 0,

συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο (– ∞,0).

Εάν x∈(0,+ ∞), τότε

f (x) = 2 – ln(x +1),

η f είναι παραγωγίσιμη, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με παράγωγο

f **΄**(x) = [2 – ln(x +1)]**΄** =  < 0,

συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,+ ∞).

Μελετάμε τη παράγωγο της f στο 0, με τον ορισμό, είναι f (0) = 2.

*  =  = (ex + 1) = 2.
*  =  = 

=  =  = – 1.

Επειδή

 ≠ ,

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, οπότε το 0, είναι κρίσιμο σημείο της f.

Eίναι λοιπόν

f **΄**(x) = .

Συνοπτικά έχουμε τον πίνακα

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | – ∞ 0 + ∞ | |
|  | **+** **–** | |
|  |  |  |

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (– ∞,0], γνησίως φθίνουσα στο [0,+ ∞). H f παρουσιάζει στο 0, τοπικό (ολικό)

μέγιστο το f (0) = 2.

**(β)** Εάν x∈(– ∞,0), η f ΄, είναι παραγωγίσιμη, με

f **΄΄**(x) = (ex + 1)**΄** = ex > 0,

συνεπώς η f στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο (– ∞,0).

Εάν x∈(0,+ ∞), η f ΄, είναι παραγωγίσιμη, με

f **΄΄**(x) =  =  > 0,

συνεπώς η f στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο (0,+ ∞).

Για να σχηματίσουμε μία πρόχειρη γραφική παράσταση της f, μελετάμε τη συμπεριφορά της στο άπειρο, είναι

* f (x) = (ex + x + 1) = – ∞, διότι ex = 0 και
* f (x) = [2 – ln(x + 1)] = – ∞, διότι ln(x + 1) = + ∞.

Ακολουθεί μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f.



**(iii)** H f παρουσιάζει στο 0, ολικό μέγιστο ισχύει λοιπόν ο ορισμός του ολικού

μεγίστου, είναι δηλαδή

f (x) ≤ f (0) ⇔ f (x) ≤ 2, για κάθε x∈ℜ

όπου η ισότητα f (x) = 2, ισχύει μόνο για x = 0.

Συνεπώς η εξίσωση f (x) = 2, έχει μοναδική ρίζα το 0.

Για την εξίσωση

f (f (x) – λ) = 2,

δεδομένου ότι η εξίσωση f (x) = 2, έχει μοναδική ρίζα το 0, θα είναι

f (x) – λ = 0 ⇔ f (x) = λ.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η εξίσωση

f (x) = λ, όπου λ < 0.

έχει δύο ακριβώς ρίζες, ετερόσημες.

Εύρεση του συνόλου τιμών της f.

**(Ι)** Δ1 = (– ∞,0]. H f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ1.

* f (x) = (ex + x + 1) = – ∞, διότι ex = 0 και
* f (0) = 2.

To σύνολο τιμών της f στο Δ1, είναι f (Δ1) = (– ∞,2].

**(ΙΙ)** Δ2 = (0,+ ∞). H f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ2.

* f (x) = (ex + x + 1) = 2.
* f (x) = [2 – ln(x + 1)] = – ∞, διότι ln(x + 1) = + ∞.

To σύνολο τιμών της f στο Δ2, είναι f (Δ2) = (– ∞,2).

Συνεπώς για την εξίσωση

f (x) = λ, όπου λ < 0,

παρατηρούμε ότι το λ∈f (Δ1), οπότε

η εξίσωση f (x) = λ, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα Δ1

και εφόσον

η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ1,

τότε η εξίσωση f (x) = λ, έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ1, υπάρχει δηλαδή μοναδικός αριθμός x1∈ Δ1 = (– ∞,0]: f (x1) = λ, με x1 < 0.

Επίσης παρατηρούμε ότι το λ∈f (Δ2), οπότε

η εξίσωση f (x) = λ, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα Δ2

και εφόσον

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ2,

τότε η εξίσωση f (x) = λ, έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ2, υπάρχει δηλαδή μοναδικός αριθμός x2∈ Δ2 = (0,+ ∞): f (x2) = λ, με x2 > 0 .

Από τις (1) & (2) προκύπτει ότι η εξίσωση

f (x) = λ, έχει ακριβώς δύο ρίζες στο ℜ, ετερόσημες.